УДК 539.3

ПРОЧНОСТНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В.Н. Барашков

НИИ прикладной математики и механики при Томском государственном университете
E-mail: ger@mail.tomsknet.ru

Изложена численная методика рационального прочностного проектирования тел вращения при осесимметричном нагружении. Результатом такого проектирования являются конструкции, которые в литературе принято называть дискретно равнопрочными. Целевая функция как таковая при этом не минимизируется, ее значения лишь иллюстрируют ход итерационного процесса, т.е. оптимизационная задача заменяется параметрическими исследованиями. Приводятся примеры прочностного проектирования метаемых элементов для высокоскоростных баллистических установок в квазистатической постановке.

1. Введение

Проблемы оптимизации конструкции, имеющие большое прикладное и теоретическое значение, привлекают большое внимание исследователей. Из работ, посвященных вопросам оптимизации массы и формы упругих тел и тонкостенных конструкций с позиций аналитического и численного решения задач математического программирования, следует отметить монографии [1–3]. Уменьшение массы конструкции без потери ее прочностных качеств является своего рода "сверхзадачей" для любого проектировщика, если не основной целью. Эта цель достигается путем выбора рациональной схемы конструкции с необходимостью, кроме других ограничений, выполнения требований по прочности. Решение задач оптимального проектирования в механике деформируемого твердого тела (МДТТ) приводит к сложным математическим задачам и наталкивается на серьезные математические трудности. Смысл построения и использования упрощенных методик сводится к тому, что они значительно сужают исследуемую область изменения управляющих параметров, в которой находится оптимальный проект, а также позволяют получать начальное приближение для использования методов математического программирования или экспериментальной отработки проектов конструкций.

В литературе [2] термины "оптимальное" и "рациональное" проектирование принято различать следующим образом: если задача решается в строгой математической постановке, то говорят об оптимальном проектировании, если же речь идет о некоторой приближенной процедуре, это принято называть рациональным проектированием. Под второе определение подходит описанная ниже, а также в [4, 5], процедура отыскания лучшего в смысле прочности проекта тела вращения.

2. Алгоритм рационального прочностного проектирования тела вращения

Задача о минимуме массы конструкции при выполнении условий прочности в той или иной форме, также как и рациональное распределение материала заданного объема, имеют большое практическое значение при создании различных конструкций.

В качестве параметра, характеризующего напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции и эффективность работы материала в отдельных точках, принимается интенсивность деформаций e_i. Задача формулируется следующим образом: найти такое распределение материала по конструкции, при котором конструкция имеет минимальную массу, а величина e_i во всех точках не превосходит заданное значение e_{max}. Для осесимметричных конструкций, которые можно рассматривать как толстостенные оболочки вращения, за управляющий параметр принимается толщина h

$$h(z) = R_1(z) - R_2(z),$$

которая при фиксированной отсчетной – внешней, внутренней или срединной – поверхности задает распределение материала по конструкции. $R_1(z)$ и $R_2(z)$ представляют собой радиальные координаты наружной и внутренней поверхности соответственно. В дальнейшем будем называть функцию $h(z)$ толщиной. При осесимметричном нагружении тела вращения внешними нагрузками задача сводится к определению функции $h(z)$, дающей минимум функционалу

$$V = \pi \int_0^L [R_1^2(z) - R_2^2(z)]\, dz \qquad (1)$$

при ограничениях прочностного и геометрического характера

$$e_i \le e_{max}, \qquad (2)$$

$$h(z) \ge h_0. \qquad (3)$$

Здесь V – объем тела вращения; L – размер в осевом направлении; e_{max} – максимальное допустимое значение интенсивности e_i; h_0 – минимальное допустимое значение толщины, назначаемое проектировщиком.

Соотношения (1–3) вместе с уравнениями равновесия, условиями на поверхности, геометрическими и физическими соотношениями представляют собой формулировку задачи нелинейного математического программирования.

В сформулированной задаче проектирования нет явно выраженной связи между значениями управляющей функции и ограничениями прочностного характера (2). В связи с этим задача переформулируется следующим образом. При численном решении задачи определения НДС на осевое сечение конструкции наносится двумерная конечно-разностная сетка, разбивающая тело по длине на так называемые подконструкции. Тем самым управляющая функция $h(z)$, которую можно трактовать как вектор бесконечной размерности, заменяется набором величин $h_i=h(z_i)$, каждая из которых постоянна в пределах i-ой подконструкции (i = 1, 2, ..., I; I – число разбиений тела по длине) и имеет смысл толщины. Этой заменой задача приводится к управлению вектором конечной размерности I. Распределение толщин h_i находится методом последовательных приближений по формуле

$$h_i^{(k+1)} = \max[h_0, h_i^{(k)}(1-b+be_{i\ \max}^{(k)}/e_{\max})],\quad i=1, 2, ..., I;\ k=0, 1, 2, ..., \qquad (4)$$

где k – номер итерации; $e_{i\max}$ – максимальная интенсивность деформаций в i-ой подконструкции, разбиваемой в свою очередь на K частей по толщине; b – своего рода коэффициент релаксации, введение которого позволяет ускорить сходимость итерационного процесса.

Подобный способ определения переменной оптимальной толщины для тонкостенных конструкций по оболочечной теории использован в работах [6–8].

За нулевое приближение $h^{(0)}$ берется некоторая постоянная толщина H. Если вновь найденная толщина $h_i^{(k+1)}$ не удовлетворяет условию (3), то она приравнивается h_0. Формула (4) имеет следующий смысл: на каждом шаге расчета толщина h_i i-ой подконструкции увеличивается, если интенсивность деформаций больше заданной $e_{\max}$, в противном случае уменьшается, если не нарушается условие (3).

Таким образом, алгоритм прочностного проектирования представляет собой многошаговый итерационный процесс. На каждом шаге определяются параметры НДС, в том числе интенсивность деформаций e_i, и затем проводится перераспределение материала по конструкции по формуле (4) с учетом ограничений (2), (3). Процесс вычислений заканчивается, если одновременно выполняются соотношения

$$\left|(V^{(k+1)}-V^{(k)})/V^{(k+1)}\right| < \varepsilon_V \text{ и } \left|(eM_i - e_{\max})/e_{\max}\right| < \varepsilon_e \qquad (5)$$

или условие

$$\left|(H_{cp}-h_0)/h_0\right| < \varepsilon_h, \qquad (6)$$

где $V^{(k)}$, $V^{(k+1)}$ – объемы тела вращения, соответствующие распределениям толщин $h^{(k)}$, $h^{(k+1)}$; ε_V, ε_e, ε_h – погрешности определения объема и выполнения ограничений (2) и (3) соответственно; eM_i – максимальная величина из I величин $e_{i\max}$; H_{cp} – средняя толщина тела вращения, определяемая как среднее арифметическое толщин I подконструкций. Последнее условие необходимо для окончания итерационного процесса при выходе значений толщин h_i на ограничение h_0, что говорит об излишнем запасе по толщине, задаваемом условием (3).

Результатом такого проектирования являются конструкции, которые в литературе принято называть дискретно равнопрочными. Целевая функция как таковая при этом не минимизируется, ее значения лишь иллюстрируют ход итерационного процесса, т.е. оптимизационная задача заменяется параметрическими исследованиями.

Определение осесимметричного упругопластического НДС проводится вариационно-разностным методом (ВРМ) [9, 10] с использованием быстродействующего метода Гаусса [11–13] для реализации системы линейных алгебраических уравнений большого порядка относительно искомых перемещений. Физически нелинейная задача решается с помощью соотношений деформационной теории пластичности и метода переменных параметров упругости.

3. Примеры проектирования конструкций при высокоскоростном метании

Изложенный алгоритм прочностного проектирования иллюстрируется примерами квазистатического расчета осесимметричных конструкций при высокоскоростном метании.

С точки зрения МДТТ процесс разгона конструкции является достаточно длинным во времени – несколько миллисекунд, и из расчетной практики известна возможность квазистатического подхода к оценке прочности большинства подобных конструкций, что связано с согласованием характерного времени нагружения и периода пробега упругих возмущений по конструкции малых габаритов. Решение исходной динамической задачи в квазистатической постановке возможно благодаря введению в исходную расчетную схему нагружения массовых сил, являющихся следствием использования связанной с метаемым телом неинерциальной системы координат [14–16]. Для работы с появляющимися фиктивными массовыми силами вводится понятие коэффициента перегрузки (или просто перегрузки N), который определяется отношением ускорения тела a в данный момент к ускорению силы тяжести g: $N=a/g$.

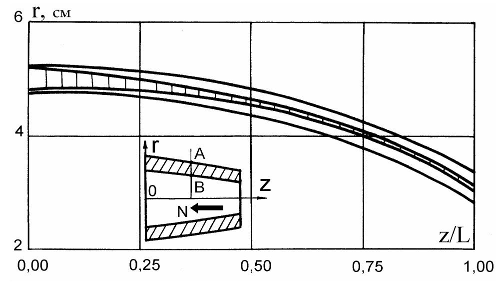


Рис. 1. *Конфигурация исходного и оптимального (заштрихованная область) проектов*

Рассматривается (рис. 1) тело вращения (материал – Ст. 3) постоянной толщины $H=AB$=0,5 см,

срединная поверхность которого образована частью эллипсоида вращения с полуосями 5,0 см и 37,6 см. Длина L =30,0 см. Тело нагружено массовыми силами с N=–5000. За отсчетную принимается срединная поверхность тела. Вследствие симметрии конструкций относительно оси вращения $0z$ на рисунках представлены лишь половины осевых сечений рассматриваемых тел.

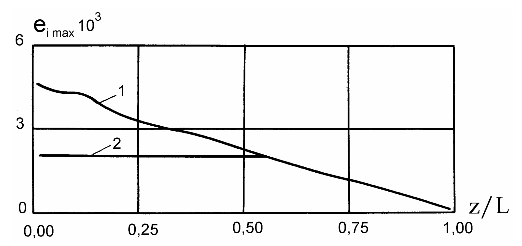


Рис. 2. *Распределение максимальных интенсивностей деформаций e_{imax} в 1) исходном и 2) оптимальном проектах по длине тела*

Конфигурация исходного и оптимального (заштрихованная область) в указанном выше смысле проектов для ограничений h_0=0,1 см, e_{max}=0,002 (что соответствует деформации начала текучести) представлены на рис. 1. Характер изменения максимальных интенсивностей деформаций $e_{i\,max}$ для обоих проектов показан на рис. 2. В отличие от исходного (кривая 1), в полученном оптимальном проекте (кривая 2), согласно ограничению (2), материал деформируется упруго. Радиальные перемещения внешней поверхности положительны и их наибольшие значения у торца z=0 достигают 0,00834 см для исходного и 0,004 см для оптимального проекта. Максимальные осевые перемещения торца z=L отрицательны и имеют соответственно значения 0,077 см и 0,053 см. Объем оболочки исходного проекта конструкции с 417 см^3 сократился на 67 % до 138,09 см^3, тем самым значительно увеличив полезный объем внутри тела вращения. Представленные результаты получены за десять итераций (под итерацией понимается расчет НДС тела с распределением толщины, полученным по формуле (4) для ε_V=ε_e=ε_h=0,01.

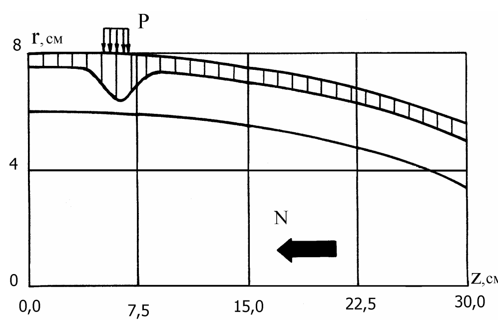


Рис. 3. *Конфигурация исходного и оптимального (заштрихованная область) проектов*

На рис. 3, 4 представлены результаты проектирования толстостенного тела вращения для случая приложения массовых сил и давления. Геометрия внешнего контура определялась как часть усеченного эллипса с полуосями 8,0 см и 38,35 см; длина равна 30,0 см, толщина исходного варианта конструкции H=2,0 см, перегрузка N=–3000, амплитуда приложенного на части внешней поверхности давления P=–500 МПа. Материал корпуса – сталь с деформацией начала текучести e_s=0,003; допустимая деформация e_{max}=0,05; h_0=0,5 см. Здесь и в следующем примере за отсчетную принимается внешняя поверхность тела. На торце z=0, как и в предыдущем рассмотренном примере, выполняются условия жесткой заделки. Конечное распределение толщины (заштрихованная область на рис. 3) получено за пять итераций.

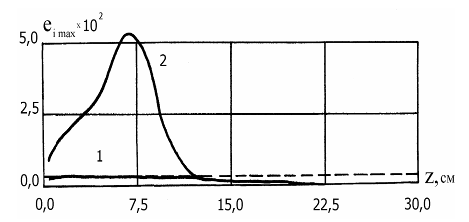


Рис. 4. *Распределение максимальных интенсивностей деформаций e_{imax} в 1) исходном и 2) оптимальном проектах по длине тела*

Масса тела в конечном варианте составляет 32 % от массы исходного проекта. Такое уменьшение стало результатом "срезания" материала в менее нагруженных частях конструкции и значительного "наращивания" материала (аналог силового элемента типа шпангоута) в месте приложения внешнего давления. Имеет место значительное увеличение интенсивности деформаций материала в оптимальном проекте, величина которой в районе этого "шпангоута" вышла с заданной погрешностью ε_e=0,05 на ограничение e_{max}. Пунктирная линия на рис. 4 обозначает деформацию начала текучести e_s.

В качестве последнего примера применения представленного метода рационального прочностного проектирования рассмотрена модельная задача о метании поддона сложной формы. Для исследования степени эрозии новых конструкционных материалов при движении в атмосфере с высокой скоростью используются установки, позволяющие с помощью специальных поддонов метать образцы материалов со скоростью 3...6 км/с. На рис. 5 представлена расчетная схема выполненного из дюралюминия такого поддона. Исследуемый образец материала помещается на внешней поверхности $0A$ дна поддона. Масса поддона равна 120 г, масса метаемого образца – 50 г. Исходная конфигурация подлежащего корректировке внутреннего контура поддона обозначена $MHGF$. Вычисления проводились для следующей геометрии поддона: R_1=1,75 см; R_2=2,25 см; R_3=2,5 см; R_4=2,0 см; L=5,0 см; $0P$=4,0 см; $0M$=0,7 см; BC=DE=0,5 см. Геометрические ограничения: для дна 0,5 см; для цилиндрической части корпуса R_5=2,0 см; R_6=2,2 см.

На внутреннем $MHGF$ и внешнем $BCDE$ контурах поддона действует давление газа P, посредством которого метается поддон. Величина перегрузки, приложенной в противоположном движению поддона направлении, вычислялась из условия равенства нулю вектора всех действующих вдоль оси $0z$ сил, и для P =100 МПа равнялась

N=11600. Давление на поверхность 0A от присоединенной массы $P_П \approx 39$ МПа. На контактных с метательной установкой поверхностях AB и EF поддона ставятся условия отсутствие трения и ограничения на радиальные перемещения. Особенностью постановки граничных условий для данной задачи является то, что на осевые перемещения не накладывается ограничений.

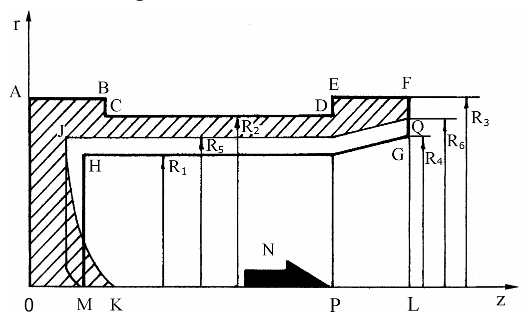


Рис. 5. *Расчетная схема метаемого поддона и результаты проектирования. Конфигурация внутреннего контура поддона: MHGF – исходная; MJQF – оптимальная; KJQF – оптимальная при отсутствии образца исследуемого материала*

Расчет НДС исходного проекта выявил упругий характер работы материала метаемого поддона, особенно в его цилиндрической части. Часть дна у оси вращения близка к выходу в пластическую область деформирования. Использование разработанной методики позволило получить новую конфигурацию *MJQF* внутреннего контура поддона. На рис. 5 видно, что его размеры вышли на заданные геометрические ограничения по всей его поверхности, за исключением небольшой части дна на оси вращения 0z. Почти весь материал дна поддона деформируется пластически, но при этом интенсивности деформаций не превосходят заданное ограничение e_{max}=0,02. Вся цилиндрическая часть корпуса находится в области упругих деформаций, что указывает на запас по прочности для материала в этой части поддона.

Анализ НДС позволяет сделать вывод о наиболее напряженной работе материала дна поддона. Примерно две трети его внешней поверхности получают осевые перемещения по направлению метания поддона, которые почти по линейному закону уменьшаются от наибольшего значения w=–0,05 см на оси вращения 0z до положительного значения w=0,012 см в точке A. Величины радиальных перемещений цилиндрической части корпуса поддона на внутренней поверхности имеют почти нулевые значения, а на поверхности CD они отрицательны (т.е. направлены к оси вращения) и также малы. Интенсивности напряжений примерно одинаковы как вдоль дна, так и по его толщине. На его внутренней поверхности их средняя величина равна ≈240 МПа.

Итогом применения алгоритма рационального прочностного проектирования явилось уменьшение массы метаемой сборки на 24 %, а массы поддона – на 34 %, которая в окончательном варианте составила 79 г. Величина перегрузки увеличилась на 32 % и достигла N=15200.

На рис. 5 линией *KJQF* представлен внутренний контур оптимального проекта поддона, полученного для случая метания его без присоединенной массы. Такое изменение конфигурации внутренней поверхности дна объясняется отсутствием приложенного на поверхности 0A давления и, как следствие этого, увеличением в материале дна значений интенсивностей деформаций, что, согласно алгоритму проектирования, автоматически приводит к увеличению толщин подконструкций. Величина перегрузки для этого варианта увеличивается с 16350 до 20200, а масса уменьшается до 84 г.

4. Выводы

Ввиду того, что при определении НДС система линейных алгебраических уравнений, являющаяся следствием использовании условия стационарности функционала полной потенциальной энергии системы, реализуется быстродействующим методом Гаусса, представленный алгоритм рационального прочностного проектирования позволяет с относительно небольшими временными затратами для конкретного нагружения в статической и квазистатической постановках получать рекомендации по конструктивному выполнению тел вращения при заданных ограничениях прочностного и геометрического характера. В рассмотренных примерах результаты были получены на относительно грубых сетках за несколько минут.

Обладая достаточной наглядностью и простотой реализации, алгоритм позволяет получать проекты меньшей массы путем изменения толщины. Проведенные расчеты для разных конструкций метаемых элементов и разных комбинаций их нагружения показали, что независимо от того, является НДС исходной конструкции упругим или упругопластическим, разработанный алгоритм приводит к уменьшению объема по сравнению с первоначальным вариантом, если он взят с запасом по прочности. В спроектированной конструкции исключается недопустимое НДС при рассматриваемом уровне нагрузки, что является следствием выполнения ограничения (2), которое эквивалентно принципу равнопрочности. В точках, где ограничение (2) выполняется в виде неравенства, возникают так называемые "мертвые" зоны, "... что приводит ... к нерациональному использованию материала несущих конструкций" [2]. По-видимому, при проектировании невозможно создавать сложные конструкции без таких зон, не вступая в противоречие с требованиями непрочностного характера – технологичности, эффективности, аэродинамики, баллистики и т.д.

Описанный алгоритм не является реализацией какого-либо из методов математического программирования, приводящего к получению оптимальной в известном смысле конструкции. Тем не менее, результаты, полученные с его помощью, достаточно наглядны, физически оправданны и могут помочь конструктору при создании образцов новой техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. — М.: Наука, 1980. — 255 с.
2. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
3. Троицкий В.А., Петухов Л.В. Оптимизация формы упругих тел. — М.: Наука, 1982. — 432 с.
4. Барашков В.Н., Люкшин Б.А. Прочностная оптимизация осесимметричной упругопластической конструкции // Проблемы снижения материалоемкости силовых конструкций: Тез. докл. Всес. конф., Горький, 23—25 окт. 1984 г. — Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1984. — С. 9.
5. Барашков В.Н., Люкшин Б.А. Алгоритм прочностного проектирования упругопластических конструкций с использованием вариационно-разностного метода // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация деформируемых систем: Всес. межвуз. сборник. — Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1988. — С. 91—97.
6. Комаров В.А. О рациональных силовых конструкциях крыльев малого удлинения // Проектирование оптимальных конструкций: Тр. / Куйбыш. авиац. ин-т. — 1968. — Вып. 32. — С. 6—26.
7. Елин В.Д., Харитонов В.И. Определение оптимальных размеров тонкостенных сосудов // Работы по механике сплошных сред. — Тула: Изд-во Тульск. политех. ин-та, 1977. — С. 107—112.
8. Бочкарев В.В., Крысько В.А. Оптимальное проектирование пластин и оболочек с учетом физической нелинейности // Прикладная механика. — 1982. — Т. 18, № 7. — С. 52—57.
9. Гриффин Д.С., Келлог Р.Б. Численное решение осесимметричных и плоских задач упругости // Механика: Сб. переводов. — М., 1968. — № 2 (108). — С. 111—125.
10. Барашков В.Н. К расчету упругопластических осесимметричных деформаций тел вращения // Теория упругости и пластичности. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978. — С. 3—10.
11. Барашков В.Н., Люкшин Б.А. К реализации вариационно-разностного метода для осесимметричных задач теории упругости и пластичности / Томск. ун-т. — Томск, 1983. — 14 с. — Библиогр.: 17 назв. — Деп. в ВИНИТИ 14.03.83, № 1335-83 Деп.
12. Барашков В.Н. Алгоритм реализации задачи теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом. Ч. I // Известия Томского политехнического университета. — 2003. — Т. 306. — № 3. — С. 23—28.
13. Барашков В.Н. Алгоритм реализации задачи теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом. Ч. II // Известия Томского политехнического университета. — 2003. — Т. 306. — № 4. — С. 23—27.
14. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1973. — Т. 1. — 536 с.
15. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин: Учеб. пособие. — М.: Машиностроение, 1973. — 456 с.
16. Барашков В.Н. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния метаемых сборок // Известия Томского политехнического университета. — 2004. — Т. 307. — № 1. — С. 29—33.

УДК 553.411.071:550.42(546.1+546.8)